### 4B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4B**.

#### Ejercicio propuesto 4B.6.1

*Adaptado de: 2º final 2017-2, problema 1.*

Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{3^n (n+1)^2}.$$

**Resultado:** $[1, 7]$: converge en los dos extremos.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 178.

#### Ejercicio propuesto 4B.6.2

*Adaptado de: 1er final 2019-1, tipo C, problema 1.*

Determine el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{7}}$$

empleando el criterio de Leibniz.

**Resultado:** Diverge: $b_n = 7^{-1/(n+1)} \to 1 \neq 0$, así que no se cumple Leibniz y falla el criterio del término $n$-ésimo.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 178.

#### Ejercicio propuesto 4B.6.3

*Adaptado de: 1er extraordinario 2017-2, problema 1.*

Escriba el número decimal periódico infinito $0.7777\ldots$ como una serie y determine su carácter. Si es convergente, calcule su suma.

**Resultado:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, geométrica convergente con suma $\frac{7}{9}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 178.

#### Ejercicio propuesto 4B.6.4

*Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 1.*

Obtenga la serie de Maclaurin de $f(x) = \ln \sqrt[3]{1+x}$.

**Resultado:** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{3n} = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{9} - \ldots$, en $(-1, 1]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 178.





# Unidad 4 · Parte A · Métodos de integración: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales

↑ Volver al índice

**Objetivo del tema 4 (programa 2026).** «Aplicar diversos métodos de integración de funciones reales y el desarrollo de dichas funciones en series de potencias estudiando sus propiedades y apoyándose en el uso de software matemático para describir situaciones ingenieriles.»

**Contenido de esta parte.** «Integración por partes, por sustitución trigonométrica y por fracciones parciales apoyándose con software matemático.»

**Instrucciones de emergencia**

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): es el problema 3 (tres integrales, una por método) en los 52 finales y extraordinarios de Cálculo Integral del Plan 2010 y en los 60 del Plan 2016. Incisos por método en el Plan 2010: fracciones parciales 50, sustitución trigonométrica 35, por partes 34, otras sustituciones 23 y potencias trigonométricas 3. En el Plan 2016: fracciones parciales 51, por partes 43, sustitución trigonométrica 35, otras sustituciones 20 y potencias trigonométricas 9.
- **Tiempo:** de 6 a 8 horas para esta parte. Es la que más rinde: es la base de las aplicaciones (Parte 3B), de la integral impropia (Parte 3C), de las series (Parte 4B) y de Cálculo Vectorial.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la tabla de la sección 4A.2 y la de integrales inmediatas de la 4A.1 (30 min).
  2. Lee los procedimientos 4A.3.1, 4A.3.3 y 4A.3.4 (partes, sustitución trigonométrica y fracciones: la terna típica).
  3. Sigue el ejemplo de la sección 4A.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios de la sección 4A.5 con cronómetro (8 min cada integral) y comprueba cada resultado derivando.

### 4A.1 Conceptos y expresiones

**Integral indefinida.** $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ quiere decir que $F'(x) = f(x)$. Por eso toda integral indefinida se *comprueba derivando*: si la derivada del resultado no regresa al integrando, hay un error. En este libro cada integral termina con esa comprobación en una línea.

**Cambio de variable.** Si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$ y

$$\int f\big(g(x)\big)\, g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Todos los métodos de esta unidad terminan en una integral inmediata, casi siempre después de un cambio de variable. Al final se regresa a $x$.

**Integrales inmediatas.** Hay que saberlas de memoria: en el examen no se permite formulario.

**Resolución.**

1. Cociente, con $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$:
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{n+1}|x+1|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n|x+1|^n} = \frac{3|x+1|}{n+1}.$$
2. Para cualquier $x$ fijo, $\lim_{n\to\infty} \frac{3|x+1|}{n+1} = 0 < 1$: la serie converge para todo $x$. No hay extremos que analizar.
3. **Intervalo de convergencia:** $(-\infty, \infty)$**; radio** $R = \infty$**.**
4. Comprobación: con $u = 3(x+1)$ es la serie de $e^u$ sin su primer término, así que suma $e^{3(x+1)} - 1$ para todo $x$.

### Ejercicio 4B.5.4 · Criterio del cociente con factorial

*Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 1.*

Emplee el criterio del cociente o de D'Alembert para determinar el carácter de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n-1)!}.$$

**Resolución.**

1. El término siguiente es $a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{n!}$. Cociente, con $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{4^n} = \frac{4}{n}.$$
2. $L = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0 < 1$.
3. **La serie converge.**
4. Comprobación: con $m = n-1$, $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4^{m+1}}{m!} = 4e^4$, un número finito.

### Ejercicio 4B.5.5 · Suma de una diferencia de geométricas

*Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 1.*

Determine el valor de la suma
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{e}{\pi}\right)^{k+1} - \frac{3}{7^{k+1}}\right].$$
Si no es posible, indique por qué es divergente.

**Resolución.**

1. Son dos geométricas. Como $e < \pi$, la razón $\frac{e}{\pi}$ es menor que 1; la otra razón es $\frac{1}{7}$. Las dos convergen, así que la suma se separa.
2. Primera: empieza en $k = 1$ con $a = \left(\frac{e}{\pi}\right)^2$ y $r = \frac{e}{\pi}$:
$$\frac{e^2/\pi^2}{1 - e/\pi} = \frac{e^2}{\pi(\pi - e)}.$$





| El integrando tiene… | Procedimiento |
|---|---|
| Una función $g(x)$ y, multiplicando, su derivada (salvo una constante): $x\cos x^2$, $\frac{\ln x}{x}$, $\frac{2x+1}{x^2+x-2}$ | Cambio de variable $u = g(x)$ (4A.3.5) |
| Un cociente de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$ | Fracciones parciales (4A.3.4); si el grado de $P$ es mayor o igual que el de $Q$, divide primero |
| $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ sin raíces reales | Completa el cuadrado y usa ang tan (4A.3.3) |
| $\sqrt{a^2 - x^2}$ (sola, en un cociente o elevada a $\frac{3}{2}$) | $x = a\,\mathrm{sen}\,\theta$ (4A.3.3) |
| $\sqrt{a^2 + x^2}$ o $(x^2 + a^2)^{3/2}$ | $x = a\tan\theta$ (4A.3.3) |
| $\sqrt{x^2 - a^2}$ | $x = a\sec\theta$ (4A.3.3) |
| $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ | Completa el cuadrado y después uno de los tres anteriores (4A.3.3) |
| Polinomio por $e^{ax}$, $\mathrm{sen}\,ax$ o $\cos ax$ | Partes con $u$ = polinomio (4A.3.1) |
| Polinomio (o nada) por $\ln x$, ang tan $x$, ang sen $x$, ang sec $x$ | Partes con $u$ = el logaritmo o la inversa (4A.3.1) |
| $e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx$, $e^{ax}\cos bx$, $\mathrm{sen}(\ln x)$, $\cos(\ln x)$ | Partes dos veces: integral cíclica (4A.3.1) |
| $\mathrm{sen}^m x\cos^n x$ con un exponente impar | Separa un factor y usa $\mathrm{sen}^2 + \cos^2 = 1$ (4A.3.2) |
| $\mathrm{sen}^m x\cos^n x$ con los dos exponentes pares | Ángulo doble (4A.3.2) |
| $\tan^m x\sec^n x$, $(\tan x - \sec x)^2$, cocientes de seno y coseno | Pasa a tan y sec y usa $1 + \tan^2 = \sec^2$ (4A.3.2) |
| $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+1}$ o $\sqrt[3]{x}$ dentro de otra función | $u = \sqrt{x}$ (o la raíz que aparezca) (4A.3.5) |
| $e^x$ dentro de una raíz o de un cociente | $u = e^x$ o $u = \sqrt{e^x - 1}$ (4A.3.5) |
| $\ln x$ junto con $\frac{\mathrm{d}x}{x}$ | $u = \ln x$ (4A.3.5) |
| $\frac{1}{x}$ dentro de otra función y $\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ o $\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ | $u = \frac{1}{x}$ (4A.3.5) |

**La terna típica.** En 50 de los 52 exámenes del Plan 2010 un inciso es de fracciones parciales; los otros dos suelen ser uno por partes y uno de sustitución trigonométrica. Si un inciso no encaja en ninguno, casi siempre es de sustitución ($u = \sqrt{x}$, $u = e^x$, $u = \ln x$) seguida de uno de los otros métodos.

## 4A.3 Procedimientos

### *4A.3.1 Integración por partes*

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

1. Elige $u$ con el orden **LIATE**: Logaritmo, Inversa trigonométrica, Algebraica (polinomio),

1. Cociente con valor absoluto:
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(2x-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(2x-1)^n}\right| = |2x-1|\,\frac{n}{n+1}.$$
2. Límite: $L(x) = |2x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |2x-1|$.
3. Converge si $|2x-1|<1$: $-1<2x-1<1 \Rightarrow 0<x<1$. Centro $\frac{1}{2}$, radio $\frac{1}{2}$.
4. Extremo $x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n} = \sum\frac{1}{n}$, la armónica (serie $p$ con $p=1$): diverge.
5. Extremo $x=0$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, alternada con $b_n=\frac{1}{n}$, que decrece y tiende a cero: converge por Leibniz (condicionalmente, porque $\sum\frac{1}{n}$ diverge).
6. **Intervalo de convergencia:** $0\le x<1$**, es decir,** $[0,1)$**.**

**Ejemplo resuelto · Serie de Maclaurin de** $\ln(x+1)$

*Adaptado de: 1er final 2016-2, tipo C, problema 1.*

Obtenga la serie de Maclaurin de la función $f(x)=\ln(x+1)$.

**Resolución.**

1. Tabla de derivadas, evaluadas en 0:

| $n$ | $f^{(n)}(x)$ | $f^{(n)}(0)$ |
|---|---|---|
| 0 | $\ln(1+x)$ | 0 |
| 1 | $(1+x)^{-1}$ | 1 |
| 2 | $-(1+x)^{-2}$ | $-1$ |
| 3 | $2(1+x)^{-3}$ | 2 |
| 4 | $-6(1+x)^{-4}$ | $-6$ |

2. Patrón: $f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!$ para $n\ge 1$. El coeficiente es
$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$
3. **Serie:**
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$
4. Intervalo (no lo pide el enunciado, pero sale en otros exámenes): el cociente da $L=|x|$; en $x=1$ queda la armónica alternada (converge) y en $x=-1$, $-\sum\frac{1}{n}$ (diverge). Converge en $(-1,1]$.
5. Comprobación: derivando término a término, $1-x+x^2-\dots=\frac{1}{1+x}$, que es la derivada de $\ln(1+x)$.



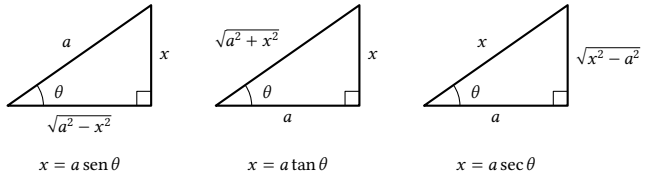


$\int \tan^m x\sec^n x\,dx$**.**

1. Si $n$ es par, separa un $\sec^2 x$, pasa el resto a tangentes con $\sec^2 x = 1+\tan^2 x$ y usa $u=\tan x$. Ejemplo:
$$\int \tan^2 x\sec^4 x\,dx = \int \tan^2 x(1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx = \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C$$
2. Si $m$ es impar, separa $\sec x\tan x$, pasa el resto a secantes con $\tan^2 x=\sec^2 x-1$ y usa $u=\sec x$.
3. Si solo hay tangentes, convierte un $\tan^2 x$ en $\sec^2 x-1$ y repite (ejercicio de la sección 4A.5).
4. Si el integrando es un cociente de senos y cosenos, escríbelo como $\tan^m x\sec^n x$: $\frac{\operatorname{sen}^a x}{\cos^b x} = \tan^a x\sec^{b-a}x$. Sirve también con exponentes fraccionarios.

También conviene saber $\int\sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\big(\sec x\tan x + \ln|\sec x+\tan x|\big)+C$ (por partes, cíclica): aparece al final de varias sustituciones trigonométricas y en longitud de arco.

*4A.3.3 Sustitución trigonométrica*




| Raíz | Sustitución y lo que queda |
|---|---|
| $\sqrt{a^2-x^2}$ | $x=a\operatorname{sen}\theta$, $dx=a\cos\theta\,d\theta$, $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta$ |
| $\sqrt{a^2+x^2}$ | $x=a\tan\theta$, $dx=a\sec^2\theta\,d\theta$, $\sqrt{a^2+x^2}=a\sec\theta$ |
| $\sqrt{x^2-a^2}$ | $x=a\sec\theta$, $dx=a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan\theta$ |

1. Identifica $a$. Si la raíz es $\sqrt{16-9x^2}$, escribe $3x=4\operatorname{sen}\theta$ (es decir, $u=3x$, $a=4$).
2. Si hay $ax^2+bx+c$, completa el cuadrado: $x^2+6x+18=(x+3)^2+9$; haz $u=x+3$ y sigue con $u$.
3. Sustituye $x$, $dx$ y la raíz; simplifica hasta una integral trigonométrica (casi siempre de potencias, 4A.3.2).
4. Integra en $\theta$.
5. Regresa a $x$ **con el triángulo**: dibuja el de tu caso (figura), pon $x$ y $a$ donde dice la sustitución y lee $\operatorname{sen}\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$… como cociente de lados. El ángulo solo se escribe con su inversa: $\theta=\operatorname{ang\,sen}\frac{x}{a}$, $\operatorname{ang\,tan}\frac{x}{a}$ o $\operatorname{ang\,sec}\frac{x}{a}$.

## 4A.4 Ejemplo resuelto

**Ejemplo resuelto · La terna típica: partes, sustitución trigonométrica y fracciones**

*Adaptado de: 2º final 2011-2, tipo A, problema 3.*

Efectúe las integrales:

$$\text{a) } \int x\cos 2x\,\mathrm{d}x \qquad \text{b) } \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{c) } \int \frac{x-3}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

**Resolución.**

1. a) Polinomio por coseno: partes con $u = x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$.

$$\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x - \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\,\mathrm{d}x$$

2. **a)** $\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$**.** Comprobación: $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + x\cos 2x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x = x\cos 2x$.

3. b) Raíz de $1-x^2$: $x = \operatorname{sen}\theta$, $\mathrm{d}x = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{1-x^2} = \cos\theta$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta &= \int \cot^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int (\csc^2\theta - 1)\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\cot\theta - \theta + C\end{aligned}$$

4. Del triángulo (hipotenusa 1, opuesto $x$, adyacente $\sqrt{1-x^2}$): $\cot\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\theta = \operatorname{ang\,sen} x$.

5. **b)** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \operatorname{ang\,sen} x + C$**.** Comprobación:

$$\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

6. c) Racional propia; $x^3 + x^2 = x^2(x+1)$, con $x$ repetido:

$$\frac{x-3}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

7. $x - 3 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$. Con $x = 0$: $B = -3$. Con $x = -1$: $C = -4$. Coeficiente de $x^2$: $A + C = 0 \Rightarrow A = 4$.

8. **c)** $\int \frac{x-3}{x^3+x^2}\mathrm{d}x = 4\ln|x| + \frac{3}{x} - 4\ln|x+1| + C$**.** Comprobación:

$$\frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x+1} = \frac{4x^2+4x-3x-3-4x^2}{x^2(x+1)} = \frac{x-3}{x^3+x^2}$$





## 4B.2 Cómo reconocer el problema

| El enunciado dice… | Procedimiento |
|---|---|
| «Determine el carácter de la serie» o «si converge o diverge» con números (sin $x$) | Carácter de una serie (4B.3.1) |
| «Empleando el criterio del cociente o de D'Alembert» | Carácter de una serie (4B.3.1), con el cociente |
| «Si es convergente, calcule su suma»; una lista $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \ldots$; un decimal periódico | Suma de una serie (4B.3.2) |
| «Empleando el criterio de Leibniz»; un factor $(-1)^n$ | Serie alternada (4B.3.3); revisa antes el término $n$-ésimo |
| «Intervalo de convergencia», con $x$ en la serie; «incluir el análisis de los extremos» | Intervalo de convergencia (4B.3.4) |
| «Serie de Maclaurin» o «de Taylor alrededor de $a$» de una función; «los primeros términos»; «el término enésimo» | Serie por derivadas (4B.3.5) |
| La función es una conocida con $2x$, $-x$, $x^2$ o una constante, o una derivada o integral de una conocida | Serie a partir de una conocida (4B.3.6) |

## 4B.3 Procedimientos

*4B.3.1 Carácter de una serie numérica*

1. Calcula $\lim_{n\to\infty} a_n$. Si no es cero (o no existe), **diverge** y terminaste.
2. ¿Es geométrica ($a_n = ar^{n-1}$) o serie $p$? Decide con la tabla de la sección 4B.1.
3. ¿Hay factoriales o potencias $c^n$? Usa el cociente: simplifica $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ antes de tomar el límite ($\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$, $\frac{4^{n+1}}{4^n} = 4$).
4. ¿Es un cociente de polinomios o de raíces? Compara en el límite con la serie $p$ de las potencias dominantes.
5. ¿Hay $(-1)^n$? Usa Leibniz (4B.3.3) y, si piden, revisa la convergencia absoluta.

*4B.3.2 Suma de una serie*

1. Escribe los primeros términos y localiza el primer término $a$ y la razón $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Cuidado con el índice: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+1}}$ empieza en $\frac{4}{9}$, no en 4.
2. Si $|r| < 1$, la suma es $\frac{a}{1-r}$; si $|r| \geq 1$, la serie diverge.
3. Si el término es una suma o diferencia de dos geométricas convergentes, suma cada una por separado.
4. Si es telescópica (fracciones parciales como $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$), escribe $S_n$, cancela y toma el límite.
5. Un decimal periódico $0.777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \ldots$ es geométrica con $r = \frac{1}{10}$.

*4B.3.3 Serie alternada (criterio de Leibniz)*

1. Escribe la serie como $\sum(-1)^{n+1}b_n$ con $b_n > 0$.

# Unidad 4 · Parte B · Sucesiones y series: carácter, criterios, intervalo de convergencia, Maclaurin y Taylor

↑ Volver al índice

**Contenido de esta parte (programa 2026, tema 4).** «Definiciones de sucesión y de serie. Series convergentes y series divergentes. Carácter de una serie empleando software matemático. Serie p, serie geométrica, serie de signos alternados. Criterios del cociente, de comparación y de la integral.» «Desarrollo de funciones en serie de potencias. Series de Maclaurin y series de Taylor. Intervalo de convergencia. Visualización de la convergencia y de la divergencia de series mediante un enfoque gráfico empleando software matemático. Uso de las series en aplicaciones a la ingeniería.» El objetivo del tema está al principio de la Parte A.

**Instrucciones de emergencia**

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): es el problema 1 en 59 de los 60 finales y extraordinarios de Cálculo Integral del Plan 2016, con 61 problemas: 35 de sucesiones y series (intervalo de convergencia 19, casi siempre con el análisis de los extremos; carácter de una serie con un criterio 9, ocho del cociente y uno de Leibniz; suma de una serie 7) y 26 de series de Maclaurin (20) o de Taylor alrededor de otro punto (6). En el Plan 2010 era el problema 6 de los 10 finales de Cálculo Diferencial: serie de Maclaurin o de Taylor en 6 e intervalo de convergencia en 4.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta parte.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 4B.1 y 4B.3 (30 min) y memoriza el formulario de la sección 4B.8: el examen no permite formulario.
  2. Sigue los dos ejemplos de la sección 4B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios de la sección 4B.5 con cronómetro (12 min cada uno): el intervalo de convergencia primero, porque es el más frecuente.
  4. Lee el criterio de la integral en la sección 4B.10: lo pide el programa 2026 y no salía en los exámenes anteriores.

## 4B.1 Conceptos y expresiones

**Sucesión.** Una sucesión es una lista infinita $a_1, a_2, a_3, \dots$ dada por un término general $a_n$. *Converge* a $L$ si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (un número); si el límite no existe o es infinito, *diverge*. El límite se calcula como el de una función de $x$ (con L'Hôpital si hace falta): $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7} = 7^0 = 1$. La sucesión es *monótona* si siempre crece ($a_{n+1} \geq a_n$) o siempre decrece ($a_{n+1} \leq a_n$), y *acotada* si $|a_n| \leq M$ para todo $n$. Toda sucesión monótona y acotada converge.

**Serie.** Una serie es la suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$ Su *suma parcial* es $S_n = a_1 + \dots + a_n$; la serie converge a $S$ si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Hay que distinguir: la *sucesión* $a_n$ puede converger (a cero) y la *serie* diverger, como en la armónica.





1. Solo hay tangentes: se convierte un $\tan^2 x$ en $\sec^2 x - 1$.

$$\int \tan^3 x \, dx = \int \tan x \sec^2 x \, dx - \int \tan x \, dx$$

2. La primera es inmediata con $u = \tan x$, $du = \sec^2 x \, dx$: $\frac{1}{2}\tan^2 x$. La segunda es $-\ln|\cos x|$.
3. $\int \tan^3 x \, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$. Comprobación: $\tan x \sec^2 x - \tan x = \tan x(\sec^2 x - 1) = \tan^3 x$.

### Ejercicio 4A.5.4 · Cociente de potencias con exponente fraccionario

*Adaptado de: 1er final 2010-1, tipo C, problema 3, inciso c).*

Efectúe $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^7 x}}\, dx$.

**Resolución.**

1. Se escribe como $\tan^m x \sec^n x$: $\cos^7 x = \cos x \cdot \cos^6 x$, así que

$$\sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^7 x}} = \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^{1/3} x \sec^2 x$$

2. Hay $\sec^2 x$ (exponente par): $u = \tan x$, $du = \sec^2 x \, dx$.

$$\int u^{1/3} \, du = \tfrac{3}{4} u^{4/3}$$

3. $\int \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^7 x}}\, dx = \frac{3}{4}\tan^{4/3} x + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\tan^4 x} + C$. Comprobación: $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\tan^{1/3} x \sec^2 x = \tan^{1/3} x \sec^2 x$.

### Ejercicio 4A.5.5 · Sustitución trigonométrica con seno: $\sqrt{16 - 9x^2}$

*Adaptado de: 2º final 2011-1, tipo A, problema 3, inciso a).*

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{16 - 9x^2}}{x^4}\, dx$.

**Resolución.**

1. Raíz de $a^2 - u^2$ con $u = 3x$, $a = 4$: $3x = 4\operatorname{sen}\theta$, $dx = \frac{4}{3}\cos\theta \, d\theta$, $\sqrt{16 - 9x^2} = 4\cos\theta$, $x^4 = \frac{256}{81}\operatorname{sen}^4\theta$.
2. Sustituyendo:

$$I = \int \frac{4\cos\theta \cdot \frac{4}{3}\cos\theta}{\frac{256}{81}\operatorname{sen}^4\theta}\, d\theta = \frac{27}{16}\int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\, d\theta$$
$$= \frac{27}{16}\int \cot^2\theta \csc^2\theta \, d\theta = -\frac{9}{16}\cot^3\theta + C$$

(con $w = \cot\theta$, $dw = -\csc^2\theta \, d\theta$).

### 4A.7 Errores frecuentes

- **No comprobar.** Derivar el resultado toma un minuto y detecta casi todos los errores de signo y de constantes; varias resoluciones publicadas tienen justo esos errores (Apéndice C).
- **Olvidar el factor de $v$ en partes.** Si $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$, entonces $v = \frac{x^2}{2}$, no $x^2$; si $\mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$.
- **Cambiar de $u$ a media integral cíclica.** En la segunda aplicación de partes hay que elegir el mismo tipo de función como $u$; si no, se regresa a la integral original y queda $0 = 0$.
- **No dividir una fracción impropia.** Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, las fracciones parciales dan un sistema sin solución.
- **Olvidar términos en la descomposición.** Un $(x-2)^2$ pide $\frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$; un cuadrático irreducible pide numerador $Bx + C$, no solo $B$.
- **Dejar la respuesta en $\theta$.** En la sustitución trigonométrica hay que regresar a $x$ con el triángulo; $\theta$ solo aparece como $\operatorname{ang\,sen}\frac{x}{a}$, $\operatorname{ang\,tan}\frac{x}{a}$ o $\operatorname{ang\,sec}\frac{x}{a}$.
- **Olvidar el factor del cambio en $\mathrm{d}x$.** Con $3x = 4\operatorname{sen}\theta$, $\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, no $\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$.
- **Quitar el valor absoluto del logaritmo.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} = \ln|x-2|$, porque el integrando también existe para $x < 2$.

### 4A.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Partes: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$; elección de $u$ con LIATE (logaritmo, inversa, algebraica, trigonométrica, exponencial).
- $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$; $\int \operatorname{ang\,tan} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{ang\,tan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
- $\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$; $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x|$; $\int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x|$.
- $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$; $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$; $1+\tan^2 x = \sec^2 x$; $1+\cot^2 x = \csc^2 x$.
- $\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$; $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$.
- $\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|\big)$.
- Sustitución trigonométrica: $\sqrt{a^2-x^2} \to x = a\operatorname{sen}\theta$; $\sqrt{a^2+x^2} \to x = a\tan\theta$; $\sqrt{x^2-a^2} \to x = a\sec\theta$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a}$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a}$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,sec}\frac{u}{a}$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2\pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|$.
- Fracciones parciales: $\frac{A}{x-r}$ por factor lineal; $\frac{A_1}{x-r} + \cdots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$ por factor repetido; $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ por cuadrático irreducible.
- $\int \frac{A\,\mathrm{d}x}{(x-r)^2} = -\frac{A}{x-r}$; $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+q} = \frac{1}{2}\ln(x^2+q)$.

### 4A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Si el examen trae varias integrales, cada una se decide con la tabla de 4A.2.
2. Antes de elegir método, busca un cambio de variable inmediato (la derivada de algo está multiplicando) o una simplificación algebraica.





4. $\int \frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \ln(x^2+1) - \frac{4}{x^2+1} + C$. Comprobación:

$$\frac{2x}{x^2+1} + \frac{8x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x+8x}{(x^2+1)^2}$$

Otra vía, más corta: con $u = x^2+1$, $x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}u$ y $2x^2+10 = 2u+8$, la integral es $\int\left(\frac{1}{u} + \frac{4}{u^2}\right)\mathrm{d}u$.

**Ejercicio 4A.5.8 · Fracción impropia: dividir primero**

*Adaptado de: 2º extraordinario 2011-1, problema 4, inciso b).*

Efectúe $\displaystyle\int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$.

**Resolución.**

1. Grado 3 contra grado 2: se divide. Cociente $x-1$, residuo $2x+1$:

$$\frac{x^3-x+3}{x^2+x-2} = x - 1 + \frac{2x+1}{x^2+x-2}$$

   (se comprueba con $(x-1)(x^2+x-2) + 2x + 1 = x^3 - x + 3$).
2. $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$ y $2x+1 = A(x-1) + B(x+2)$. Con $x=1$: $B=1$; con $x=-2$: $A=1$. (También sirve el atajo: $2x+1$ es la derivada de $x^2+x-2$.)
3. $\int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+2| + \ln|x-1| + C$. Comprobación:

$$x - 1 + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{2x+1}{x^2+x-2}$$

**Ejercicio 4A.5.9 · Fracciones con un factor lineal repetido**

*Adaptado de: 1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso b).*

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-5x^2+8x-4}$.

**Resolución.**

1. Raíces enteras de la cúbica: $x=1$ la anula ($1-5+8-4=0$). Al dividir entre $x-1$ queda $x^2-4x+4 = (x-2)^2$. Así, $x^3-5x^2+8x-4 = (x-1)(x-2)^2$.
2. Descomposición:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

3. $1 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)$. Con $x=1$: $A=1$. Con $x=2$: $C=1$. Coeficiente de $x^2$: $A + B = 0 \Rightarrow B = -1$.
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-5x^2+8x-4} = \ln|x-1| - \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + C$. Comprobación: al sumar $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ sobre $(x-1)(x-2)^2$, el numerador es $(x-2)^2 - (x-1)(x-2) + (x-1) = 1$.

| Integral | Resultado (más $C$) |
|---|---|
| $\int u^n\,du,\ n\neq -1$ | $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ |
| $\int \dfrac{du}{u}$ | $\ln\lvert u\rvert$ |
| $\int e^u\,du$ | $e^u$ |
| $\int \operatorname{sen} u\,du;\ \int \cos u\,du$ | $-\cos u;\ \operatorname{sen} u$ |
| $\int \sec^2 u\,du;\ \int \csc^2 u\,du$ | $\tan u;\ -\cot u$ |
| $\int \sec u\tan u\,du$ | $\sec u$ |
| $\int \csc u\cot u\,du$ | $-\csc u$ |
| $\int \tan u\,du$ | $-\ln\lvert\cos u\rvert = \ln\lvert\sec u\rvert$ |
| $\int \cot u\,du$ | $\ln\lvert\operatorname{sen} u\rvert$ |
| $\int \sec u\,du$ | $\ln\lvert\sec u+\tan u\rvert$ |
| $\int \csc u\,du$ | $\ln\lvert\csc u-\cot u\rvert$ |
| $\int \dfrac{du}{a^2+u^2}$ | $\dfrac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\dfrac{u}{a}$ |
| $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ | $\operatorname{ang\,sen}\dfrac{u}{a}$ |
| $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}$ | $\dfrac{1}{a}\operatorname{ang\,sec}\dfrac{u}{a}$ (con $u>a>0$) |
| $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}$ | $\ln\left\lvert u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right\rvert$ |

**Identidades trigonométricas que se usan.**

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1,\qquad 1+\tan^2 x=\sec^2 x,$$
$$1+\cot^2 x=\csc^2 x,\qquad \operatorname{sen} 2x=2\operatorname{sen} x\cos x,$$
$$\operatorname{sen}^2 x=\tfrac{1}{2}(1-\cos 2x),\qquad \cos^2 x=\tfrac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

**Valor absoluto y constante.** El logaritmo lleva valor absoluto: $\int \frac{dx}{x-2}=\ln\lvert x-2\rvert+C$. Dos resultados que difieren en una constante son los dos correctos: $\ln\lvert x^2+x-2\rvert$ y $\ln\lvert x+2\rvert+\ln\lvert x-1\rvert$ son la misma antiderivada; $2\operatorname{ang\,sec}\sqrt{e^x}$ y $2\operatorname{ang\,tan}\sqrt{e^x-1}$ también.

**Los cinco métodos.** *Por partes* (4A.3.1) para productos de funciones de distinto tipo; *potencias trigonométricas* (4A.3.2) para $\operatorname{sen}^m x\cos^n x$ y $\tan^m x\sec^n x$; *sustitución trigonométrica* (4A.3.3) para raíces de $a^2-x^2$, $a^2+x^2$ y $x^2-a^2$; *fracciones parciales* (4A.3.4) para cocientes de polinomios; *sustituciones diversas* (4A.3.5) para raíces de $x$, exponenciales y logaritmos dentro de otra función. Muchas integrales de examen combinan dos: primero un cambio de variable y después uno de los otros cuatro.

### 4A.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado siempre dice «Efectuar las integrales» (o «Efectúa»); lo que decide el método es la **forma del integrando**. Revisa los renglones en este orden: el primero que encaje es el método.





3. Segunda: $a=\frac{3}{49}$, $r=\frac{1}{7}$:
$$\frac{3/49}{1-1/7}=\frac{3}{49}\cdot\frac{7}{6}=\frac{1}{14}.$$
4. **La serie converge y su suma es** $\dfrac{e^2}{\pi(\pi-e)}-\dfrac{1}{14}$ ($\approx 5.485$).

**Ejercicio 4B.5.6 · Maclaurin de** $\operatorname{senh} 2x$ **e intervalo**

*Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 1.*

Obtenga el desarrollo en serie de Maclaurin de $f(x)=\operatorname{senh} 2x$, determine su intervalo de convergencia y haga el análisis de los extremos.

**Resolución.**

1. Derivadas: $f=\operatorname{senh} 2x$, $f'=2\cosh 2x$, $f''=4\operatorname{senh} 2x$, $f'''=8\cosh 2x$, y así sucesivamente. En $x=0$: 0, 2, 0, 8, 0, 32, … Las de orden par valen 0 y la de orden impar $n$ vale $2^n$.
2. Términos no nulos, con $n=2k+1$:
$$\operatorname{senh} 2x=2x+\frac{8x^3}{3!}+\frac{32x^5}{5!}+\dots$$
$$\operatorname{senh} 2x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$
Es la serie de $\operatorname{senh} u$ con $u=2x$: $2x+\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5+\dots$
3. Cociente entre términos no nulos consecutivos:
$$\left\lvert\frac{a_{k+1}}{a_k}\right\rvert=\frac{4x^2}{(2k+2)(2k+3)}\to 0.$$
4. El límite es $0<1$ para todo $x$: no hay extremos.
5. $\operatorname{senh} 2x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!}$**, convergente en** $(-\infty,\infty)$**.**

**Ejercicio 4B.5.7 · Taylor de** $e^{2x}$ **alrededor de 1**

*Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 1.*

Obtenga la serie de Taylor de $f(x)=e^{2x}$ alrededor de $a=1$.

**Resolución.**

1. Derivadas: $f^{(n)}(x)=2^n e^{2x}$, así que $f^{(n)}(1)=2^n e^2$: $e^2,\ 2e^2,\ 4e^2,\ 8e^2,\dots$
2. Coeficientes $\frac{f^{(n)}(1)}{n!}$: $e^2,\ 2e^2,\ \frac{4e^2}{2!}=2e^2,\ \frac{8e^2}{3!}=\frac{4}{3}e^2$.
3. **Serie:**
$$e^{2x}=e^2+2e^2(x-1)+2e^2(x-1)^2+\tfrac{4}{3}e^2(x-1)^3+\dots$$
$$e^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n e^2}{n!}(x-1)^n,\quad x\in\mathbb{R}.$$
4. Comprobación: $e^{2x}=e^2\,e^{2(x-1)}$, y con $u=2(x-1)$ en $e^u=\sum\frac{u^n}{n!}$ sale la misma serie, válida para todo $x$.

Trigonométrica, Exponencial. La primera que aparezca en el integrando es $u$; el resto, con $\mathrm{d}x$, es $\mathrm{d}v$.
2. Escribe el cuadro: $u$, $\mathrm{d}u = u'\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v$, $v = \int \mathrm{d}v$ (sin constante).
3. Aplica la fórmula. La nueva integral $\int v\,\mathrm{d}u$ debe ser más sencilla; si no lo es, cambia la elección.
4. Si queda otra vez un producto de polinomio por exponencial o trigonométrica, repite partes (una vez por cada grado del polinomio).
5. **Integral cíclica** ($e^{ax}\operatorname{sen} bx$, $\operatorname{sen}(\ln x)$): aplica partes dos veces *con el mismo tipo de u*. Reaparece la integral original $I$; despéjala como una incógnita: $I = \cdots - kI \Rightarrow (1+k)I = \ldots$
6. Con $\ln x$ o una inversa sola, toma $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, $v = x$.

**Las que hay que saber.**

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

$$\int \operatorname{ang\,tan} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{ang\,tan} x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int \operatorname{ang\,sen} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{ang\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Con $\operatorname{ang\,sec} x$ (para $x > 1$): $u = \operatorname{ang\,sec} x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$; la integral que queda es algebraica (ejercicio de la sección 4A.5).

### *4A.3.2 Potencias trigonométricas*

En el examen de esta materia salen poco (3 incisos en el Plan 2010 y 9 en el Plan 2016), pero Cálculo Vectorial las usa en casi todas las integrales de línea, de superficie y en polares. Vale la pena dominarlas.

$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,\mathrm{d}x$**.**

1. Si $m$ es impar, separa un $\operatorname{sen} x$, pasa el resto a cosenos con $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ y usa $u = \cos x$.
2. Si $n$ es impar, separa un $\cos x$, pasa el resto a senos con $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ y usa $u = \operatorname{sen} x$.
3. Si los dos son pares, baja las potencias con $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ y $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$; repite si hace falta.

Ejemplos:

$$\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C$$





## 4B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

### Ejercicio 4B.5.1 · Intervalo con los dos extremos convergentes

*Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo A, problema 1.*

Obtenga el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-4)^n}{4^n\, n^2}$$

e incluya el análisis de los extremos.

**Resolución.**

1. Cociente:
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-4|}{4}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to \frac{|x-4|}{4}.$$
2. $\frac{|x-4|}{4} < 1 \Rightarrow |x-4| < 4 \Rightarrow 0 < x < 8$. Centro 4, radio 4.
3. $x = 0$: $\frac{(-1)^n(-4)^n}{4^n n^2} = \frac{(-1)^{2n}4^n}{4^n n^2} = \frac{1}{n^2}$. Serie $p$ con $p = 2 > 1$: converge.
4. $x = 8$: $\frac{(-1)^n 4^n}{4^n n^2} = \frac{(-1)^n}{n^2}$. La serie de sus valores absolutos es $\sum \frac{1}{n^2}$, que converge: converge absolutamente.
5. **Intervalo de convergencia:** $0 \le x \le 8$**, es decir,** $[0, 8]$**.**

### Ejercicio 4B.5.2 · Intervalo con exponente $n-1$

*Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 1.*

Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\, x^{n-1}}{n}.$$

**Resolución.**

1. Cociente (las potencias de $x$ bajan un grado: $\frac{x^n}{x^{n-1}} = x$):
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4^{n+1}|x|^n}{n+1}\cdot\frac{n}{4^n|x|^{n-1}} = 4|x|\,\frac{n}{n+1} \to 4|x|.$$
2. $4|x| < 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$. Centro 0, radio $\frac{1}{4}$.
3. $x = \frac{1}{4}$: $\frac{4^n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{4}{n}$. La serie $4\sum \frac{1}{n}$ diverge (armónica).
4. $x = -\frac{1}{4}$: $\frac{4^n}{n}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{4(-1)^{n-1}}{n}$. Es 4 por la armónica alternada: converge (condicionalmente) por Leibniz.
5. **Intervalo de convergencia:** $-\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{4}$**, es decir,** $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$**.**

### Ejercicio 4B.5.3 · Intervalo con factorial: radio infinito

*Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 1.*

Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+1)^n}{n!}.$$

*4A.3.4 Fracciones parciales*

1. **Compara grados.** Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, divide: $\frac{P}{Q} = \text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{Q}$.
2. **Factoriza el denominador** en factores lineales y cuadráticos irreducibles. Para una cúbica, prueba raíces enteras que dividan al término independiente ($\pm1, \pm2, \ldots$) y divide.
3. **Escribe la descomposición:**
   - cada $(x-r)$ distinto da $\frac{A}{x-r}$;
   - un $(x-r)^k$ repetido da $\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$;
   - cada cuadrático irreducible $x^2+px+q$ da $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$; si está al cuadrado, también $\frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^2}$.
4. **Obtén las constantes.** Multiplica por el denominador. Sustituye las raíces reales (cada una da una constante al instante: método de «tapar»); para las que falten, iguala coeficientes de $x^2$ o del término independiente, o sustituye un valor sencillo como $x=0$.
5. **Integra cada término:**

$$\int \frac{A\,\mathrm{d}x}{x-r} = A\ln|x-r|, \qquad \int \frac{A\,\mathrm{d}x}{(x-r)^2} = -\frac{A}{x-r},$$
$$\int \frac{Bx+C}{x^2+q}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\ln(x^2+q) + \frac{C}{\sqrt{q}}\operatorname{ang\,tan}\frac{x}{\sqrt{q}}.$$

6. Junta los logaritmos si quieres ($\ln|x-1| - \ln|x-2| = \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$) y comprueba derivando o sumando las fracciones.

**Atajo.** Antes de descomponer, revisa si el numerador es la derivada del denominador, o casi: $\int \frac{2x+1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x = \ln|x^2+x-2| + C$ sale con $u = x^2+x-2$.

*4A.3.5 Sustituciones diversas*

1. Busca la parte «incómoda» del integrando (una raíz de $x$, una exponencial dentro de una raíz, un $\ln x$ o un $\frac{1}{x}$ dentro de otra función) y llámala $u$.
2. Despeja $x$ y $\mathrm{d}x$ en términos de $u$, o identifica $\mathrm{d}u$ en el integrando.
3. Sustituye todo: no debe quedar ninguna $x$. Lo que queda suele ser una integral inmediata, racional (4A.3.4), de partes (4A.3.1) o de sustitución trigonométrica (4A.3.3).
4. Regresa a $x$ y comprueba derivando.

| Sustitución | Ejemplo |
|---|---|
| $u=\sqrt{x}$, $x=u^2$, $\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$ | $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u} = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$ |
| $u=e^x$, $\mathrm{d}u=e^x\mathrm{d}x$ | $\int \frac{e^x\mathrm{d}x}{1+e^{2x}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \operatorname{ang\,tan} e^x + C$ |
| $u=\ln x$, $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$ | $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$ |
| $u=\frac{1}{x}$, $\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ | $\int \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \operatorname{sen} u\,\mathrm{d}u = \cos\frac{1}{x} + C$ |
| $u=x^2$, $\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$ | $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{2}\operatorname{ang\,tan} x^2 + C$ |





2. Calcula $\lim_{n\to\infty} b_n$. Si no es cero, la serie diverge por el término $n$-ésimo (no por Leibniz).
3. Comprueba que $b_n$ decrece: $b_{n+1} \le b_n$, o bien la derivada de $b(x)$ es negativa.
4. Con las dos condiciones, converge. Si piden el tipo, estudia $\sum b_n$: si converge, es absoluta; si no, condicional.

*4B.3.4 Intervalo de convergencia*

1. Aplica el cociente con valor absoluto a toda la expresión, incluida la $x$:

$$L(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

2. Resuelve $L(x) < 1$. Queda $|x-a| < R$, es decir, $a-R < x < a+R$. Si $L(x) = 0$ para todo $x$, el intervalo es $(-\infty, \infty)$ y no hay extremos.
3. Sustituye cada extremo en la serie **original**: obtienes dos series numéricas. Decide cada una con 4B.3.1 (casi siempre serie $p$ o Leibniz).
4. Escribe el intervalo con corchete en los extremos que convergen y paréntesis en los que divergen.

*4B.3.5 Serie de Maclaurin o Taylor por derivadas*

1. Haz la tabla: $f$, $f'$, $f''$, $f'''$, $f^{(4)}$ y cada una evaluada en $a$ (en Maclaurin, $a=0$). Simplifica antes de derivar: $\ln\sqrt[3]{1+x} = \frac{1}{3}\ln(1+x)$.
2. Busca el patrón de $f^{(n)}(a)$: signo alternado $(-1)^{n+1}$, factorial $(n-1)!$, potencias $2^n$, ceros en los pares o impares.
3. Escribe los términos $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ y el término general con su índice inicial.
4. Si piden el intervalo, aplica 4B.3.4 al término general.

*4B.3.6 Serie a partir de una conocida*

1. Reconoce la conocida: $e^u$, $\operatorname{sen} u$, $\cos u$, $\operatorname{senh} u$, $\cosh u$, $\ln(1+u)$, $\frac{1}{1-u}$.
2. Sustituye $u$ ($u=2x$, $u=-x$, $u=x^2$, $u=2(x-1)$) y simplifica cada término.
3. Si la función es una derivada o integral de una conocida, deriva o integra término a término: $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x}$.
4. El intervalo es el de la conocida con $u$ en lugar de $x$: $\frac{2}{1+x}$ converge si $|-x| < 1$. En los extremos revisa de nuevo, porque integrar puede ganar un extremo y derivar perderlo.

## 4B.4 Ejemplo resuelto

**Ejemplo resuelto · Intervalo de convergencia con los dos extremos**

*Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 1.*

Determine el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n}.$$

**Resolución.**

## 4A.5 Ejercicios de examen (resueltos)

### Ejercicio 4A.5.1 · Partes cíclica: exponencial por seno

*Adaptado de: 1er final 2010-2, tipo A, problema 4, inciso a).*

Efectúe $\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$.

**Resolución.**

1. Partes con $u = \operatorname{sen} x$, $\mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$:

$$I = \tfrac{1}{2}e^{2x}\operatorname{sen} x - \tfrac{1}{2}\int e^{2x}\cos x \, \mathrm{d}x$$

2. Otra vez partes, con el mismo tipo de $u$: $u = \cos x$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$:

$$\int e^{2x}\cos x \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}e^{2x}\cos x + \tfrac{1}{2}I$$

3. Sustituyendo: $I = \frac{1}{2}e^{2x}\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x - \frac{1}{4}I$, así que $\frac{5}{4}I = \frac{1}{4}e^{2x}(2\operatorname{sen} x - \cos x)$.
4. $\int e^{2x}\operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{5}e^{2x}(2\operatorname{sen} x - \cos x) + C$**.** Comprobación:

$$\tfrac{1}{5}e^{2x}\big[2(2\operatorname{sen} x - \cos x) + (2\cos x + \operatorname{sen} x)\big] = e^{2x}\operatorname{sen} x$$

### Ejercicio 4A.5.2 · Partes con una inversa: $x \operatorname{ang\,sec} x$

*Adaptado de: 2º extraordinario 2019-1, problema 3, inciso b).*

Efectúe $\int x \operatorname{ang\,sec} x \, \mathrm{d}x$ (con $x > 1$).

**Resolución.**

1. LIATE: la inversa es $u$. $u = \operatorname{ang\,sec} x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$; $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$, $v = \frac{x^2}{2}$.
2. Partes:

$$I = \frac{x^2}{2}\operatorname{ang\,sec} x - \frac{1}{2}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$$

3. La integral que queda es inmediata con $w = x^2 - 1$: $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}$.
4. $\int x \operatorname{ang\,sec} x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\operatorname{ang\,sec} x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C$**.** Comprobación:

$$x\operatorname{ang\,sec} x + \frac{x^2}{2x\sqrt{x^2-1}} - \frac{x}{2\sqrt{x^2-1}} = x\operatorname{ang\,sec} x$$

### Ejercicio 4A.5.3 · Potencia impar de la tangente

*Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo C, problema 3, inciso a).*

Efectúe $\int \tan^3 x \, \mathrm{d}x$.

**Resolución.**





**Criterio del término *n*-ésimo.** Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (o no existe), la serie diverge. Si el límite es cero, no se concluye nada.

**Series de referencia.**

| Serie | Carácter |
|---|---|
| Geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots$ | converge si $\lvert r\rvert < 1$, con suma $\frac{a}{1-r}$ ($a$ es el primer término); diverge si $\lvert r\rvert \geq 1$ |
| Serie $p$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ | converge si $p > 1$; diverge si $p \leq 1$ |
| Armónica $\sum \frac{1}{n}$ ($p = 1$) | diverge |
| Armónica alternada $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ | converge (condicionalmente), con suma $\ln 2$ |
| Telescópica $\sum(b_n - b_{n+1})$ | $S_n = b_1 - b_{n+1}$; converge a $b_1 - \lim b_n$ si ese límite existe |

**Criterios para series de términos positivos.**

- *Comparación directa:* si $0 \leq a_n \leq b_n$ y $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ converge; si $a_n \geq b_n \geq 0$ y $\sum b_n$ diverge, $\sum a_n$ diverge.
- *Comparación en el límite:* si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ con $0 < c < \infty$, las dos series tienen el mismo carácter. Se compara con una geométrica o una serie $p$ que tenga las potencias dominantes: $\frac{n+1}{n^3+2}$ con $\frac{1}{n^2}$.
- *Cociente (D'Alembert):* con $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, la serie converge si $L < 1$, diverge si $L > 1$ y el criterio no decide si $L = 1$. Es el criterio de las series con factoriales y potencias $c^n$.

**Series alternadas (Leibniz).** Una serie $\sum(-1)^{n+1}b_n$ con $b_n > 0$ converge si $b_n$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Si además $\sum |a_n|$ converge, la convergencia es *absoluta*; si $\sum a_n$ converge pero $\sum |a_n|$ diverge, es *condicional*. Toda serie absolutamente convergente converge.

**Serie de potencias.** Es una serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, con centro $a$. Converge en un intervalo centrado en $a$: solo en $x = a$, para todo $x$ (radio $R = \infty$) o para $|x - a| < R$, y en los extremos $x = a \pm R$ puede converger o no; cada extremo se estudia aparte. Ese conjunto es el *intervalo de convergencia*.

**Series de Taylor y de Maclaurin.** Si $f$ tiene derivadas de todos los órdenes en $a$, su serie de Taylor alrededor de $a$ es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

es decir, $f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$ La serie de Maclaurin es el caso $a = 0$. Dentro de su intervalo de convergencia, una serie de potencias se puede derivar e integrar término a término (el radio no cambia), y en ella se puede sustituir $x$ por $2x$, $-x$, $x^2$, etcétera.

3. Triángulo: hipotenusa 4, opuesto $3x$, adyacente $\sqrt{16-9x^2}$. Entonces $\cot\theta = \frac{\sqrt{16-9x^2}}{3x}$ y $\cot^3\theta = \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{27x^3}$.
4. $\int \frac{\sqrt{16-9x^2}}{x^4}\,dx = -\frac{(16-9x^2)^{3/2}}{48x^3} + C$. Comprobación:

$$\frac{27x^4\sqrt{16-9x^2} + 3x^2(16-9x^2)^{3/2}}{48x^6} = \frac{\sqrt{16-9x^2}\,(27x^2+48-27x^2)}{48x^4} = \frac{\sqrt{16-9x^2}}{x^4}$$

**Ejercicio 4A.5.6 · Sustitución trigonométrica con secante: $\sqrt{x^2-1}$**

*Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 3, inciso b).*

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$ (con $x>1$).

**Resolución.**

1. Raíz de $x^2-a^2$ con $a=1$: $x=\sec\theta$, $dx=\sec\theta\tan\theta\,d\theta$, $\sqrt{x^2-1}=\tan\theta$.
2. Sustituyendo:

$$I = \int \frac{\tan\theta}{\sec\theta}\sec\theta\tan\theta\,d\theta = \int \tan^2\theta\,d\theta = \int(\sec^2\theta-1)\,d\theta = \tan\theta-\theta+C$$

3. Triángulo: hipotenusa $x$, adyacente 1, opuesto $\sqrt{x^2-1}$; $\tan\theta=\sqrt{x^2-1}$, $\theta=\operatorname{ang\,sec} x$.
4. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-1} - \operatorname{ang\,sec} x + C$. Comprobación:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

**Ejercicio 4A.5.7 · Fracciones con un cuadrático repetido**

*Adaptado de: 1er extraordinario 2019-2, problema 3, inciso b).*

Efectúe $\displaystyle\int \frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

**Resolución.**

1. Racional propia (grado 3 contra grado 4); $x^2+1$ es irreducible y está al cuadrado:

$$\frac{2x^3+10x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

2. $2x^3+10x = (Ax+B)(x^2+1)+Cx+D = Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)$. Igualando coeficientes: $A=2$, $B=0$, $A+C=10 \Rightarrow C=8$, $D=0$.
3. $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1)$ y $\int \frac{8x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{4}{x^2+1}$ (las dos con $u=x^2+1$).





3. Escribe el método al inicio de cada inciso («por partes», «$x=2\tan\theta$», «fracciones parciales»); si te equivocas después, el planteamiento cuenta.
4. En fracciones parciales, revisa grados y factoriza antes de escribir la descomposición; usa las raíces para las constantes.
5. En sustitución trigonométrica, dibuja el triángulo antes de integrar: lo necesitarás para regresar a $x$.
6. Comprueba cada resultado derivando (una línea) y escribe $+C$.

### 4A.10 Lo que agrega el Plan 2026: integrar con software

El programa pide resolver las integrales «apoyándose con software matemático». Un sistema de álgebra computacional (como sympy, en el recuadro) da la antiderivada en un instante, pero conviene saber tres cosas:

- **La forma puede ser otra.** El resultado puede diferir del tuyo en una constante o en la forma algebraica ($\ln|x| - \ln|x+1|$ contra $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$; ang tan contra ang cot). Para compararlos, deriva los dos o resta y simplifica: la diferencia debe ser constante.
- **Puede omitir valores absolutos** y escribir $\ln(x)$ donde va $\ln|x|$: trabaja con variables complejas. En el examen, escribe el valor absoluto.
- **Comprobar sí es tarea de la computadora:** derivar tu resultado y restar el integrando debe dar 0. Es lo mismo que el paso de comprobación de cada ejercicio de esta parte.

**Ejercicio propuesto 4A.10.1 · Partes en una integral impropia**

Calcule $\displaystyle\int x\,e^{-x}\,dx$ y, con ella, determine si $\displaystyle\int_0^\infty x\,e^{-x}\,dx$ converge.

**Resultado:** $\int xe^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x}+C$; la impropia converge y vale 1.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 177.

**Con la computadora**

```
# La terna del ejemplo, con la comprobacion por derivacion
from sympy import cos, diff, integrate, simplify, sqrt
from sympy import symbols
x = symbols("x", positive=True)
fs = [x*cos(2*x), sqrt(1 - x**2)/x**2,
      (x - 3)/(x**3 + x**2)]
for f in fs:
    F = integrate(f, x)
    print(F)
    assert simplify(diff(F, x) - f) == 0
```

**Ejercicio 4A.5.10 · Sustitución $u = x^2$ y después tangente**

*Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 3, inciso b).*

Efectúe $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$.

**Resolución.**

1. El factor $x$ es casi la derivada de $x^2$: $u = x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$.
$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}$$
2. Raíz de $1+u^2$: $u = \tan\theta$, $\mathrm{d}u = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, $\sqrt{1+u^2} = \sec\theta$.
$$I = \frac{1}{2}\int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$
3. Regreso: $\tan\theta = u = x^2$, $\sec\theta = \sqrt{1+x^4}$.
4. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + \sqrt{1+x^4}\right) + C$. Comprobación:
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x + \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}}{x^2+\sqrt{1+x^4}} = \frac{x\left(\sqrt{1+x^4}+x^2\right)}{\sqrt{1+x^4}\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$$

## 4A.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución y comprueba cada uno derivando. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4A**.

**Ejercicio propuesto 4A.6.1**

*Adaptado de: 2º extraordinario 2010-1, tipo A, problema 3, inciso a).*

Efectúe $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

**Resultado:** $\frac{x}{2}\big[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\big] + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 175.

**Ejercicio propuesto 4A.6.2**

*Adaptado de: 1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso a).*

Efectúe $\displaystyle\int x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

**Resultado:** $\frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 176.

**Ejercicio propuesto 4A.6.3**

*Adaptado de: 2º final 2015-2, tipo B, problema 3, inciso a).*

Efectúe $\displaystyle\int (\tan x - \sec x)^2\,\mathrm{d}x$.





**Resultado:** $2\tan x - 2\sec x - x + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 176.

**Ejercicio propuesto 4A.6.4**

*Adaptado de: 2º final 2020-1, problema 3, inciso c).*

Efectúe $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{sen}^2(x^2)}{\sec(x^2)}\,\mathrm{d}x$.

**Resultado:** $\frac{1}{6}\operatorname{sen}^3(x^2) + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 176.

**Ejercicio propuesto 4A.6.5**

*Adaptado de: 2º extraordinario 2012-2, problema 3, inciso a).*

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left[(x+3)^2+9\right]^3}}$.

**Resultado:** $\frac{x+3}{9\sqrt{(x+3)^2+9}} + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 176.

**Ejercicio propuesto 4A.6.6**

*Adaptado de: 2º extraordinario 2019-1, problema 3, inciso c).*

Efectúe $\displaystyle\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}$.

**Resultado:** $\frac{1}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{4}\ln(e^{2x}+1) - \frac{1}{2}\operatorname{ang\,tan}\,e^x + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 177.

**Ejercicio propuesto 4A.6.7**

*Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo A, problema 3, inciso c).*

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}}$.

**Resultado:** $-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 177.

**Ejercicio propuesto 4A.6.8**

*Adaptado de: 2º final 2011-1, tipo A, problema 3, inciso b).*

Efectúe $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

**Resultado:** $\operatorname{ang\,tan}\sqrt{e^{2x}-1} + C$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 177.